С.В. Дворянинов

ТРЕНИНГ-ПОДГОТОВКА К ЕГЭ: КАСАТЕЛЬНАЯ И ПАРАМЕТРЫ

В статье предложены и решены задачи, которые можно использовать при подготовке к ЕГЭ. Большей частью задачи являются новыми и не повторяют задачи ЕГЭ прошлых лет или задачи тренировочных сборников. Задачи предназначены для отработки понятия касательной и решения различных задач с параметром и соответствуют примерно уровню задач С3 и С5 единого экзамена. Задачи, доступные девятиклассникам, отмечены знаком (+9).

Задача 1 (+9). На координатной плоскости XOY задано множество парабол

$$y = x^2 - 2px + p^2 + 2p,$$

где параметр $p \in R$. Найдите такую прямую линию, которая пересекает каждую из этих парабол ровно в одной точке. В ответе укажите все такие прямые.

Решение. Любая вертикальная прямая $x = c$, постоянная $c \in R$, пересекает каждую параболу ровно в одной точке. Будем искать прямую $y = kx + b$, удовлетворяющую условию задачи.

Найдем значения коэффициентов k, b такие, что квадратное относительно x уравнение

$$x^2 - 2px + p^2 + 2p = kx + b \text{ или}$$

$$x^2 - (2p + k)x + p^2 + 2p - b = 0$$

имеет единственное решение при каждом значении параметра p. Дискриминант уравнения $D = (2p + k)^2 - 4p^2 - 8p + 4b$ или $D = (4k - 8)p + k^2 + 4b$ тождественно равен нулю относительно параметра p. Отсюда последовательно находим $k = 2$ и $b = -1$.

Ответ: $x = c$, $c \in R$, $y = 2x - 1$.

Примечание. В этой задаче важно не забыть о вертикальных прямых на плоскости, то есть о прямых, которые параллельны оси ординат OY, задаваемых уравнением $x = c$.

Задача 2. Найдите такую параболу $y = ax^2 + bx + c$, касательная к которой в каждой ее точке имеет вид $y = px + p^2$, где $p \in R$.

Решение. По условию для любого значения x_0 найдется такое значение параметра p, при котором для каждого x справедливо равенство

$$(2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = px + p^2.$$

Левая часть получена здесь из общего уравнения касательной к параболе. Мы имеем равенство двух линейных относительно x функций, следовательно, равны их коэффициенты и свободные члены:

$$\begin{cases} 2ax_0 + b = p \\ -ax_0^2 + c = p^2. \end{cases}$$

Исключая параметр p, делаем вывод о том, что выполняется равенство

$$(2ax_0 + b)^2 = -ax_0^2 + c,$$

то есть равенство

$$(4a^2+a)x_0^2+4abx_0+b^2-c=0$$

является тождеством по переменной x_0. Это равносильно тому, что все коэффициенты последнего квадратного трехчлена равны нулю. Поскольку $a \neq 0$, последовательно находим

$$a=\frac{-1}{4},\quad b=0,\quad c=0.$$

Ответ: $y=\frac{-1}{4}x^2$.

Примечание. При решении задачи важно «не испугаться» обилия букв, то есть переменных и постоянных величин.

Задача 3. Дано множество парабол $y = x^2 - 4px + 2p^2$. При любом значении параметра p $(p \in R)$ соответствующая парабола имеет ровно одну общую точку с некоторой фиксированной параболой $y = ax^2 + bx + c$, причем в общей точке параболы имеют и общую касательную. Найдите фиксированную параболу.

Решение. Ищем такие значения a, b, c, что для любого p найдется единственное значение x_0 такое, что

$$ax_0^2+bx_0+c=x_0^2-4px_0+2p^2$$

и что

$$2ax_0 + b = 2x_0 - 4p.$$

Первое уравнение отражает пересечение парабол, второе – наличие общей касательной в точке пересечения.

Первый случай. Допустим, что $a = 1$. Тогда из второго уравнения находим $b = -4p$. Но это равенство невозможно: слева — число, справа — переменная величина. Следовательно, имеет место

Второй случай. $a \neq 1$. Первое уравнение – квадратное относительно x_0, следовательно,

$$D = (b + 4p)^2 - 4(a - 1)(c - 2p^2) \equiv 0,$$

или

$$D = (16 + 8\,(a - 1))p^2 +$$
$$+ 8bp + b^2 - 4(a - 1)c \equiv 0.$$

Это есть тождество относительно переменной величины p. Следовательно, все три коэффициента последнего квадратного трехчлена равны нулю. Отсюда последовательно находим $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$.

Ответ: $y = -x^2$.

Задача 4. Дано множество квадратичных функций

$$f(x) = x^2 - 2px + p^2 + 2p, \qquad (1)$$

где параметр $p \in R$. Найдите такую прямую линию, которая является касательной к графику каждой функции из этого множества.

Решение. Уравнение касательной к графику функции (1) в точке с абсциссой x_0 таково:

$$y=(2x_0-2p)(x-x_0)+x_0^2-2px_0+p^2+2p,$$

или

$$y=(2x_0-2p)x-x_0^2+p^2+2p. \qquad (2)$$

При любом значении x_0 и любом значении p уравнение (2) должно задавать одну и ту же линейную функцию

$$y = kx + b.$$

Следовательно,

$$\begin{cases}2x_0-2p=k\\ -x_0^2+p^2+2p=b.\end{cases} \qquad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) находим

$$x_0=p+\frac{k}{2}.$$

Подставляя это во второе уравнение системы (3), находим

$$b=-p^2-pk-\frac{1}{4}k^2+p^2+2p,$$

или

$$b=\frac{-1}{4}k^2+(2-k)p.$$

Величина b не должна зависеть от значения параметра p, это возможно только при $k = 2$, и тогда $b = -1$.

Ответ: $y = 2x - 1$.

Рассмотрим еще одну задачу, аналогичную задаче 4.

Задача 5. Дано множество дробно-линейных функций

$$f(x)=\frac{(2p+1)x-2p^2-p-2}{x-p}, \qquad (4)$$

где параметр $p \in R$. Найдите такую прямую, которая является касательной к графику каждой функции из этого множества.

Р е ш е н и е. Уравнение касательной к графику функции (4) в точке с абсциссой x_0 таково:

$$y=\frac{2}{(x_0-p)^2}(x-x_0)+2p+1-\frac{2}{x_0-p}.$$

При всех возможных значениях переменных x_0 и p это уравнение должно задавать одну и ту же прямую $y = kx + b$. Отсюда приходим к системе двух уравнений

$$\frac{2}{(x_0-p)^2}=k,$$

$$\frac{-2}{(x_0-p)^2}x_0+2p+1-\frac{2}{x_0-p}=b.$$

Выразим x_0 из первого уравнения и подставим во второе (выкладки мы опускаем). В новом уравнении коэффициент при p должен быть равен нулю. Отсюда найдем $k = 2$. Затем получим, что $b = 5$ или $b = -3$.

О т в е т: $y = 2x + 5$; $y = 2x - 3$.

Задача 6 (+9). Докажите, что при любом значении параметра p прямая линия

$$y=px+4\sqrt{1+p^2} \qquad (5)$$

является касательной к некоторой окружности с центром в начале координат. Найдите радиус этой окружности.

Р е ш е н и е. Пусть $x^2 + y^2 = R^2$ — уравнение окружности, удовлетворяющей условию задачи. Очевидно, уравнение касательной в точке $(0; R)$: $y = R$. Согласно (5), прямая, параллельная оси абсцисс, получается только при $p = 0$, и это прямая $y = 4$. Следовательно, условию задачи может удовлетворять только окружность $x^2 + y^2 = 4^2$. Рассмотрим эту окружность.

Касательная к окружности в точке $(x_0;\sqrt{4^2-x_0^2})$ при $x_0 \neq \pm 4$ задается уравнением

$$y=\frac{-x_0}{\sqrt{4^2-x_0^2}}(x-x_0)+\sqrt{4^2-x_0^2}$$

или

$$y=\frac{-x_0}{\sqrt{4^2-x_0^2}}x+\frac{4^2}{\sqrt{4^2-x_0^2}}. \qquad (6)$$

Если положить $p=\frac{-x_0}{\sqrt{16-x_0^2}}$, то — проверьте! — уравнение (6) в точности совпадает с уравнением (5). А это означает, что при любом значении параметра p уравнение (5) задает касательную к окружности $x^2 + y^2 = 4^2$ в точке

$$\left(\frac{-4p}{\sqrt{1+p^2}};\frac{4}{\sqrt{1+p^2}}\right).$$

Решим задачу 6 другим способом.

Прямая линия (5) при $p \neq 0$ пересекает оси координат в точках $A(0;4\sqrt{1+p^2})$ и $B\left(-\frac{4}{p}\sqrt{1+p^2};0\right)$. Площадь прямоугольного треугольника AOB равна $S=\frac{8}{|p|}(1+p^2)$, гипотенуза $AB=\frac{4}{|p|}(1+p^2)$. Следовательно, высота, проведенная к гипотенузе, равна 4. Это означает, что гипотенуза AB (то есть прямая линия (5)) касается окружности $x^2 + y^2 = 4^2$, радиус которой равен 4. При $p = 0$ также есть касание.

О т в е т: 4.

Задача 7. Найдите хотя бы одну прямую линию, которая является касательной к графику функции $y = \mathrm{tg}(x - p) + 2p$ при любом значении параметра p.

Решение. Будем искать такие числа k, b, что для любого значения параметра p найдется такое значения x_0, при котором равенство

$$\frac{1}{\cos^2(x_0 - p)}(x - x_0) + \mathrm{tg}(x_0 - p) + 2p = kx + b$$

является тождеством относительно x. Отсюда приходим к системе из двух уравнений

$$\frac{1}{\cos^2(x_0 - p)} = k,$$

$$\frac{-x_0}{\cos^2(x - p)} + \mathrm{tg}(x_0 - p) + 2p = b.$$

Из первого уравнения найдем, в частности,

$$x_0 = +\arccos\frac{1}{\sqrt{k}} + 2\pi n + p.$$

Подставив это значение во второе уравнение системы, получим

$$\left(-\arccos\frac{1}{\sqrt{k}} - 2\pi n - p\right)k + \sqrt{k-1} + 2p = b.$$

Последнее равенство есть тождество относительно p, отсюда находим сначала $k = 2$, а затем $b = -\frac{\pi}{2} - 4\pi n + 1$.

Ответ. Условию задачи удовлетворяет каждая прямая $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2} + 4\pi n$, $n \in Z$. В частности, при $n = 0$ $y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.