

С.В. Дворянинов

ТРЕНИНГ-ПОДГОТОВКА К ЕГЭ: КАСАТЕЛЬНАЯ И ПАРАМЕТРЫ

В статье предложены и решены задачи, которые можно использовать при подготовке к ЕГЭ. Большинство задачи являются новыми и не повторяют задачи ЕГЭ прошлых лет или задачи тренировочных сборников. Задачи предназначены для отработки понятия касательной и решения различных задач с параметром и соответствуют примерно уровню задач С3 и С5 единого экзамена. Задачи, доступные девятиклассникам, отмечены знаком (+9).

Задача 1 (+9). На координатной плоскости XOY задано множество парабол $y = x^2 - 2px + p^2 + 2p$, где параметр $p \in R$. Найдите такую прямую линию, которая пересекает каждую из этих парабол ровно в одной точке. В ответе укажите все такие прямые.

Решение. Любая вертикальная прямая $x = c$, постоянная $c \in R$, пересекает каждую параболу ровно в одной точке. Будем искать прямую $y = kx + b$, удовлетворяющую условию задачи.

Найдем значения коэффициентов k , b такие, что квадратное относительно x уравнение

$$x^2 - 2px + p^2 + 2p = kx + b \quad \text{или} \\ x^2 - (2p + k)x + p^2 + 2p - b = 0$$

имеет единственное решение при каждом значении параметра p . Дискриминант уравнения $D = (2p + k)^2 - 4p^2 - 8p + 4b$ или $D = (4k - 8)p + k^2 + 4b$ тождественно равен нулю относительно параметра p . Отсюда последовательно находим $k = 2$ и $b = -1$.

Ответ: $x = c$, $c \in R$, $y = 2x - 1$.

Примечание. В этой задаче важно не забыть о вертикальных прямых на плоскости, то есть о прямых, которые параллельны оси ординат OY , задаваемых уравнением $x = c$.

Задача 2. Найдите такую параболу $y = ax^2 + bx + c$, касательная к которой в каждой ее точке имеет вид $y = px + p^2$, где $p \in R$.

Решение. По условию для любого значения x_0 найдется такое значение параметра p , при котором для каждого x справедливо равенство

$$(2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c = px + p^2.$$

Левая часть получена здесь из общего уравнения касательной к параболу. Мы имеем равенство двух линейных относительно x функций, следовательно, равны их коэффициенты и свободные члены:

$$\begin{cases} 2ax_0 + b = p \\ -ax_0^2 + c = p^2. \end{cases}$$

Исключая параметр p , делаем вывод о том, что выполняется равенство

$$(2ax_0 + b)^2 = -ax_0^2 + c,$$

то есть равенство

$$(4a^2 + a)x_0^2 + 4abx_0 + b^2 - c = 0$$

является тождеством по переменной x_0 . Это равносильно тому, что все коэффициенты последнего квадратного трехчлена равны нулю. Поскольку $a \neq 0$, последовательно находим

$$a = \frac{-1}{4}, \quad b = 0, \quad c = 0.$$

$$\text{Ответ: } y = \frac{-1}{4}x^2.$$

Примечание. При решении задачи важно «не испугаться» обилия букв, то есть переменных и постоянных величин.

Задача 3. Дано множество парабол $y = x^2 - 4px + 2p^2$. При любом значении параметра p ($p \in R$) соответствующая парабола имеет ровно одну общую точку с некоторой фиксированной параболой $y = ax^2 + bx + c$, причем в общей точке параболы имеют и общую касательную. Найдите фиксированную параболу.

Решение. Ищем такие значения a , b , c , что для любого p найдется единственное значение x_0 такое, что

$$ax_0^2 + bx_0 + c = x_0^2 - 4px_0 + 2p^2$$

и что

$$2ax_0 + b = 2x_0 - 4p.$$

Первое уравнение отражает пересечение парабол, второе — наличие общей касательной в точке пересечения.

Первый случай. Допустим, что $a = 1$. Тогда из второго уравнения находим $b = -4p$. Но это равенство невозможно: слева — число, справа — переменная величина. Следовательно, имеет место

Второй случай. $a \neq 1$. Первое уравнение — квадратное относительно x_0 , следовательно,

$$D = (b + 4p)^2 - 4(a - 1)(c - 2p^2) \equiv 0,$$

или

$$D = (16 + 8(a - 1))p^2 + 8bp + b^2 - 4(a - 1)c \equiv 0.$$

Это есть тождество относительно переменной величины p . Следовательно, все три коэффициента последнего квадратного трехчлена равны нулю. Отсюда последовательно находим $a = -1$, $b = 0$, $c = 0$.

Ответ: $y = -x^2$.

Задача 4. Дано множество квадратичных функций

$$f(x) = x^2 - 2px + p^2 + 2p, \quad (1)$$

где параметр $p \in R$. Найдите такую прямую линию, которая является касательной к графику каждой функции из этого множества.

Решение. Уравнение касательной к графику функции (1) в точке с абсциссой x_0 таково:

$$y = (2x_0 - 2p)(x - x_0) + x_0^2 - 2px_0 + p^2 + 2p, \text{ или}$$

$$y = (2x_0 - 2p)x - x_0^2 + p^2 + 2p. \quad (2)$$

При любом значении x_0 и любом значении p уравнение (2) должно задавать одну и ту же линейную функцию

$$y = kx + b.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2x_0 - 2p = k \\ -x_0^2 + p^2 + 2p = b. \end{cases} \quad (3)$$

Из первого уравнения системы (3) находим

$$x_0 = p + \frac{k}{2}.$$

Подставляя это во второе уравнение системы (3), находим

$$b = -p^2 - pk - \frac{1}{4}k^2 + p^2 + 2p,$$

или

$$b = \frac{-1}{4}k^2 + (2 - k)p.$$

Величина b не должна зависеть от значения параметра p , это возможно только при $k = 2$, и тогда $b = -1$.

Ответ: $y = 2x - 1$.

Рассмотрим еще одну задачу, аналогичную задаче 4.

Задача 5. Дано множество дробно-линейных функций

$$f(x) = \frac{(2p+1)x - 2p^2 - p - 2}{x - p}, \quad (4)$$

где параметр $p \in R$. Найдите такую прямую, которая является касательной к графику каждой функции из этого множества.

Решение. Уравнение касательной к графику функции (4) в точке с абсциссой x_0 таково:

$$y = \frac{2}{(x_0 - p)^2}(x - x_0) + 2p + 1 - \frac{2}{x_0 - p}.$$

При всех возможных значениях переменных x_0 и p это уравнение должно задавать одну и ту же прямую $y = kx + b$. Отсюда приходим к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{2}{(x_0 - p)^2} &= k, \\ \frac{-2}{(x_0 - p)^2}x_0 + 2p + 1 - \frac{2}{x_0 - p} &= b. \end{aligned}$$

Выразим x_0 из первого уравнения и подставим во второе (выкладки мы опускаем). В новом уравнении коэффициент при p должен быть равен нулю. Отсюда найдем $k = 2$. Затем получим, что $b = 5$ или $b = -3$.

Ответ: $y = 2x + 5$; $y = 2x - 3$.

Задача 6 (+9). Докажите, что при любом значении параметра p прямая линия

$$y = px + 4\sqrt{1+p^2} \quad (5)$$

является касательной к некоторой окружности с центром в начале координат. Найдите радиус этой окружности.

Решение. Пусть $x^2 + y^2 = R^2$ — уравнение окружности, удовлетворяющей условию задачи. Очевидно, уравнение касательной в точке $(0; R)$: $y = R$. Согласно (5), прямая, параллельная оси

абсцисс, получается только при $p = 0$, и это прямая $y = 4$. Следовательно, условию задачи может удовлетворять только окружность $x^2 + y^2 = 4^2$. Рассмотрим эту окружность.

Касательная к окружности в точке $(x_0; \sqrt{4^2 - x_0^2})$ при $x_0 \neq \pm 4$ задается уравнением

$$y = \frac{-x_0}{\sqrt{4^2 - x_0^2}}(x - x_0) + \sqrt{4^2 - x_0^2}$$

или

$$y = \frac{-x_0}{\sqrt{4^2 - x_0^2}}x + \frac{4^2}{\sqrt{4^2 - x_0^2}}. \quad (6)$$

Если положить $p = \frac{-x_0}{\sqrt{16 - x_0^2}}$, то — проверьте! — уравнение (6) в точности совпадает с уравнением (5). А это означает, что при любом значении параметра p уравнение (5) задает касательную к окружности $x^2 + y^2 = 4^2$ в точке

$$\left(\frac{-4p}{\sqrt{1+p^2}}; \frac{4}{\sqrt{1+p^2}} \right).$$

Решим задачу 6 другим способом.

Прямая линия (5) при $p \neq 0$ пересекает оси координат в точках $A(0; 4\sqrt{1+p^2})$ и $B\left(-\frac{4}{p}\sqrt{1+p^2}; 0\right)$.

Площадь прямоугольного треугольника AOB равна $S = \frac{8}{|p|}(1+p^2)$, гипотенуза

$AB = \frac{4}{|p|}(1+p^2)$. Следовательно, высота, проведенная к гипотенузе, равна 4.

Это означает, что гипотенуза AB (то есть прямая линия (5)) касается окружности $x^2 + y^2 = 4^2$, радиус которой равен 4. При $p = 0$ также есть касание.

Ответ: 4.

Задача 7. Найдите хотя бы одну прямую линию, которая является касатель-

ной к графику функции $y = \operatorname{tg}(x - p) + 2p$ при любом значении параметра p .

Решение. Будем искать такие числа k, b , что для любого значения параметра p найдется такое значения x_0 , при котором равенство

$$\frac{1}{\cos^2(x_0 - p)}(x - x_0) + \operatorname{tg}(x_0 - p) + 2p = kx + b$$

является тождеством относительно x . Отсюда приходим к системе из двух уравнений

$$\frac{1}{\cos^2(x_0 - p)} = k,$$

$$\frac{-x_0}{\cos^2(x_0 - p)} + \operatorname{tg}(x_0 - p) + 2p = b.$$

Из первого уравнения найдем, в частности,

$$x_0 = +\arccos \frac{1}{\sqrt{k}} + 2\pi n + p.$$

Подставив это значение во второе уравнение системы, получим

$$\left(-\arccos \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\pi n - p\right)k + \sqrt{k-1} + 2p = b.$$

Последнее равенство есть тождество относительно p , отсюда находим сначала

$$k = 2, \text{ а затем } b = -\frac{\pi}{2} - 4\pi n + 1.$$

Ответ. Условию задачи удовлетворяет каждая прямая $y = 2x + 1 - \frac{\pi}{2} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

В частности, при $n = 0$ $y = 2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1$.