С.В. Курганов

О ЗАДАЧЕ С6 ИЗ ЕГЭ-2012

В статье обсуждается решение задачи С6 прошедшего ЕГЭ-2012 по математике.

Задача С6 традиционно завершает вариант заданий ЕГЭ по математике. Эта задача считается самой трудной, точнее — трудоемкой. Ее решение оценивается 4 баллами. Рассмотрим одну такую задачу, аналогичную реально предложенной на экзамене.

Каждый ученик из класса побывал в кино или театре, а некоторые, возможно, — и там, и там. При этом в театре мальчиков было не более $\frac{3}{13}$ *от всех, побывавших в театре; в кино мальчиков было не более* $\frac{4}{9}$ *от всех, побывавших в кино. Далее идут* <u>*три разных вопроса.*</u>

а) *Всего в классе* 20 *учеников. Могло ли в классе быть* 10 *мальчиков?*

б) *Всего в классе* 20 *учеников. Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в классе?*

с) *Какой наименьшей могла быть доля девочек в этом классе?*

Какими могут оказаться первые впечатления от условия задачи во время экзамена? Сразу бросается в глаза внешняя «новизна» задачи. Абсолютно похожие задачи не вспоминаются. Условие довольно длинное, как роман с продолжением. Его не запомнить даже после трех-четырех прочтений. Это дополнительная трудность. Обычно хочется выучить условие задачи «наизусть», чтобы оно, как сказано в одном популярном пособии, «постоянно вертелось в голове». Вопрос части а) содержит коварную частицу *ли* — это трудная формулировка, ибо может быть и так, и сяк. Еще надо учесть, что до этого выпускник уже решал (или даже решил) 17 задач, на этом марафоне накопилась усталость, да и внимание уже не то... Вот поэтому и решают эту последнюю задачу немногие.

Сейчас мы убедимся, что эта задача ЕГЭ доступна ... учащимся 9, а то и 8 класса. Достаточно уметь оперировать с неравенствами, знать, как меняется величина положительной дроби при уменьшении-увеличении числителя или знаменателя. Конечно, нужны элементарная логика, инициатива, умение переводить словесное условие задачи на математический язык.

Впрочем, является ли эта задача совершенно новой? Пожалуй, нет. В последние 10–15 лет в разных сборниках можно найти вариации такой детской задачи:

Вчера некоторые учащиеся нашего класса были в театре. Количество мальчиков, побывавших там, равно количеству девочек, которые в театре не были. Что больше: количество побывавших в театре учеников или количество девочек в классе?

Присмотритесь к рис. 1, — и ответ станет очевидным. И одно, и другое количество равно $X + A$.

Рис. 1

И хотя от этой задачи до С6 — дистанция огромного размера, воспользуемся идеей графического представления условия. На рис. 2 мы видим 4 прямоугольника, символизирующие разбиение всех учеников класса на 4 множества. Возможно, множества X и Y пересекаются; возможно, пересекаются два множества A и B. M, D, X, Y, A, B — количество элементов каждого множества соответственно.

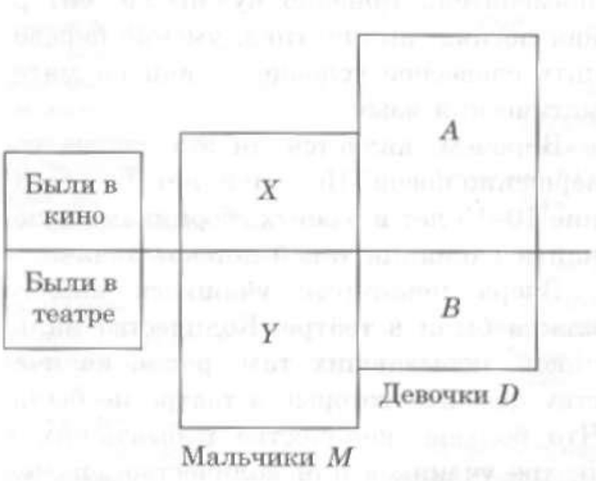

Рис. 2

По общему для трех вопросов условию имеем неравенства

$$Y \le \frac{3}{13}(Y+B),\quad X \le \frac{4}{9}(X+A). \qquad (1)$$

Упрощая систему (1), получим

$$5X \le 4A,\quad 10Y \le 3B. \qquad (2)$$

Сначала ответим на вопрос а). Из условия а) следует, что

$$M = 10,\ X \le 10,\ Y \le 10,\ X + Y \ge 10, \qquad (3)$$

$$D = 10,\ A \le 10,\ B \le 10,\ A + B \ge 10. \qquad (4)$$

Из (2) и (4) получаем верхнюю оценку

$$5X \le 40,\ 10Y \le 30,$$

и соответственно

$$X \le 8,\ Y \le 3.$$

При этих ограничениях последнее неравенство из (3) выполняется лишь в немногих случаях:

$$X = 8 \text{ и } Y = 3;\ X = 8 \text{ и } Y = 2;$$
$$X = 7 \text{ и } Y = 3.$$

В каждом из этих трех вариантов равенство $M = 10$ возможно. *Один* из трех вариантов указан в рекомендациях экспертам, проверяющим работы на ЕГЭ (в которых в равной мере должны обнаруживаться *все три* варианта).

Перейдем к вопросу б).

Мы уже убедились, что 10 мальчиков в группе быть может. При этом некоторые требуемые неравенства выполнялись, так сказать, на грани возможного. Это наводит на мысль, что 10 — это наибольшее возможное количество мальчиков в классе.

Допустим поэтому, что мальчиков в группе 11 или больше: $M \ge 11$, тогда

$$X + Y \ge 11. \qquad (5)$$

Количество девочек $D \le 9$, следовательно, $A \le 9$, $B \le 9$.

В этом случае из (2) получаем оценки сверху:

$$X \le \frac{4}{5} \times 9 = 7{,}2,\quad Y \le \frac{3}{10} \times 9 = 2{,}7.$$

Но при этом неравенство (5) не выполнено! Получено противоречие. Следовательно, наше допущение неверно. Вывод: наибольшее возможное количество мальчиков в группе равно 10.

Перейдем к вопросу с). Нас интересует наименьшее возможное значение дроби $\dfrac{D}{M+D}$, то есть наибольшее возможное значение обратной дроби $\dfrac{M+D}{D}=\dfrac{M}{D}+1$, или дроби

$$K=\frac{M}{D}. \qquad (6)$$

Ясно, что при неизменном M наибольшее значение K получится, когда знаменатель D (при всех других фиксированных параметрах задачи!) — наименьший. Это так, если $D=A+B$ (другими словами, каждая девочка побывала и в кино, и в театре).

Теперь, считая значение D выбранным и постоянным, будем выбирать наибольшее возможное значение M. В этом случае из (2) получаем

$$X\le\frac{4}{5}\times D=\frac{8}{10}\times D,\ \ Y\le\frac{3}{10}\times D.$$

и тогда $M\le X+Y\le\dfrac{11}{10}D$.

Следовательно, кандидат на наибольшее возможное значение M — это величина $\dfrac{11}{10}D$.

Выберем $D=10$, тогда $M=11$, $X=8$, $Y=3$. Все условия задачи выполнены! При этом доля девочек в классе равна

$$\frac{D}{M+D}=\frac{10}{11+10}=\frac{10}{21}.$$

Ответ: а) да; б) 10; с) $\dfrac{10}{21}$.

Вот и всё.